§4: Zahlenmengen

A) Die natürlichen Zahlen

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Addition, Multiplikation, Ordnungsrelation:

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. $\quad m \leq n :\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N}$ mit $m + x = n$.

$m < n :\Leftrightarrow (m \leq n \wedge m \neq n)$.

Induktionsprinzip: Sei $m \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ eine Aussage für alle $n \geq m$. Angenommen: i) $A(m)$ ist wahr

ii) $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ ist wahr $\forall n \geq m$.

Dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \geq m$.

Beispiele: a) $3^n > n^3 \ \forall n \geq 4$.

I.A: $n = 4$. $\quad 3^4 = 81 > 64 = 4^3$.

I.V: Ang. $3^n > n^3$ gilt für ein beliebiges (aber festes) $n \geq 4$.

I.S: z.z: $3^{n+1} > (n+1)^3$. $\qquad [(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1]$

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n \overset{I.V}{>} 3n^3 = n^3 + n^3 + n^3 = n^3 + n \cdot n^2 + n^3 \overset{n \geq 4}{\geq} n^3 + 3n^2 + n^3 =$$
$$n^3 + 3n^2 + n^2 \cdot n \overset{n \geq 4}{\geq} n^3 + 3n^2 + 16n = n^3 + 3n^2 + 3n + 13n > n^3 + 3n^2 + 3n + 1 =$$
$$(n+1)^3.$$

b) Sei (a_n) die Folge definiert durch $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Dann gelten: i) $a_n \geq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ ii) $a_{n+1} \geq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. (2)

Zu i): I.A: $n=0$. $a_0 = 1 \geq 1$.

I.V: Ang, $a_n \geq 1$ gilt für ein beliebiges (aber festes) $n \in \mathbb{N}$.

I.S: Z.z: $a_{n+1} \geq 1$.

$$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \overset{I.V}{\geq} \sqrt{1+1} = \sqrt{2} > 1.$$

Zu ii): I.A: $n=0$. $a_1 = \sqrt{1+a_0} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} > 1 = a_0$.

I.V: Ang, $a_{n+1} \geq a_n$ gilt für ein beliebiges (aber festes) $n \in \mathbb{N}$.

I.S: Z.z: $a_{n+2} \geq a_{n+1}$.

$$a_{n+2} = \sqrt{1+a_{n+1}} \overset{I.V}{\geq} \sqrt{1+a_n} = a_{n+1}.$$

$\square$

Starke Induktion

Prinzip: Sei $m \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ eine Aussage für alle $n \geq m$.

Angenommen:

(*) Für jedes $n \geq m$ gilt:
Wenn $A(k)$ für alle $k < n$ gilt, dann gilt auch $A(n)$.

Dann gilt $A(n)$ für alle $n \geq m$.

Beweis: Widerspruchsbeweis. Ang, $A(n)$ ist falsch für ein $n \geq m$.

Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl $n \geq m$ sodass $A(n)$ falsch ist.

Dann gilt $A(k)$ für alle $k < n_0$, und laut (*) gilt also $A(n_0)$. $\lightning$

$\square$

Beispiele: a) Jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, ist ein Produkt von Primzahlen.

Induktion über n

Sei $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$ beliebig, aber fest.

I.V: Wir nehmen an, dass jede natürliche Zahl $k < n$ $(k \geq 2)$ ist ein Produkt von Primzahlen.

Z.z: n ist ein Produkt von Primzahlen.

Fall 1: n ist eine Primzahl.

Dann ist $n = p$ ein Produkt von Primzahlen.

Fall 2: n ist keine Primzahl.

Seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $1 < n_1, n_2 < n$ und $n = n_1 n_2$.

$n_1, n_2 < n \overset{I.V}{\Longrightarrow} n_1, n_2$ sind Produkt von Primzahlen, sagen wir $n_1 = p_1 p_2 \cdots p_r$ mit p_i prim $\forall i \leq r$, und $n_2 = q_1 q_2 \cdots q_s$ mit q_j prim $\forall j \leq s$.

Daraus folgt $n = n_1 n_2 = p_1 p_2 \cdots p_r q_1 q_2 \cdots q_s$. n ist Produkt von Primzahlen.

$\square$

b) Sei (f_n) die Folge definiert durch $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $\forall n \geq 2$. [Fibonacci-Folge] Dann gilt $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Induktion über n

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest.

I.V: $\forall k < n$ gilt $f_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right)$.

Z.z: $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

$n=0$: $f_0=0$ und $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}(1-1)=0.$

$n=1$: $f_1=1$ und $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=1.$

$n\geq 2$: $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}\overset{\text{I.V.}}{=}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\right)$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}-\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

$\square$

<u>Bem</u>: In $\mathbb{N}$ kann die Gleichung $x+5=3$ nicht gelöst werden. Daher die folgende Erweiterung von $\mathbb{N}$:

B) Die ganzen Zahlen

$\mathbb{Z}=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$

$\mathbb{Z}^*:=\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$

Addition, Multiplikation, Ordnungsrelation:

Seien $m,n\in\mathbb{Z}$: $m\leq n:\Leftrightarrow \exists x\in\mathbb{N}$ mit $m+x=n$.

$m<n:\Leftrightarrow (m\leq n\wedge m\neq n)$.

Jede Gleichung der Form $x+a=b$ (mit $a,b\in\mathbb{Z}$) hat eine eindeutige Lösung in $\mathbb{Z}$: $x=b-a$.

$(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ist ein kommutativer nullteilerfreier Ring.
$2x=3$ hat keine Lösung in $\mathbb{Z}$.

c) Die rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m,n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\}$$

Bem: Eine rationale Zahl hat viele mögliche Darstellungen.
z.B: $x = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{-8}{-16} = \dots$ Allgemein gilt (laut Konstruktion): $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \Leftrightarrow mn' = nm'$.

Addition: $\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} := \frac{mn'+nm'}{nn'}$.

Multiplikation: $\frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n'} := \frac{mm'}{nn'}$.

Bem: z.z. ist: Die Addition und die Multiplikation hängen nicht von der Auswahl der Representanten ab.

$(\mathbb{Q},+,\cdot)$ ist ein Körper.

Ist $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$? Rein formal nein denn (z.B) die Objekte 3 und $\frac{3}{1}$ sind verschieden. Aber: $\begin{array}{l} \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \\ n \mapsto \frac{n}{1} \end{array}$ ist ein Ringhomomorphismus, daher dürfen wir n und $\frac{n}{1}$ identifizieren.

Ordnungsrelation auf $\mathbb{Q}$: Sei $x \in \mathbb{Q}$. OBdA, $x = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}^*$.

Def: i) $x \geq 0 :\Leftrightarrow m \geq 0$ ii) $x > 0 :\Leftrightarrow (x \geq 0 \wedge x \neq 0)$

iii) Für $x, y \in \mathbb{Q}$ setzt man: $x \leq y :\Leftrightarrow y - x \geq 0$, $x < y :\Leftrightarrow (x \leq y \wedge x \neq y)$.

Eigenschaften von $\leq$:

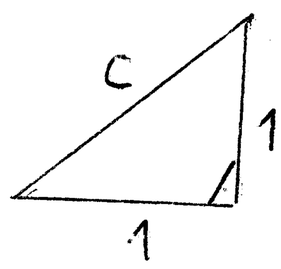
a) $(\mathbb{Q}, \leq)$ ist total (linear) geordnet, d.h. die Relation $\leq$ auf $\mathbb{Q}$ ist reflexiv, transitiv, antisymmetrisch und erfüllt

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}: x \leq y \vee y \leq x.$$

b) $x, y > 0 \Rightarrow (x + y > 0 \wedge xy > 0)$.

iii) aus den obigen Def. + Eigenschaften a), b) $\overset{\text{laut Def.}}{\Longrightarrow}$ $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ ist ein angeordneter Körper.

$\mathbb{Q}$ enthält nicht "alle" Zahlen:



$c \notin \mathbb{Q}$

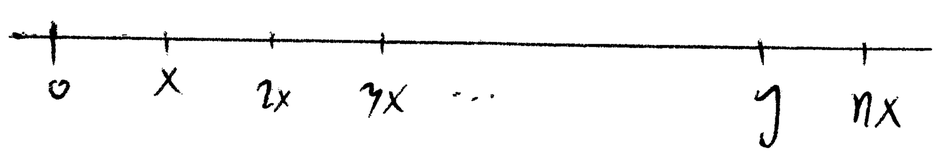
D) Die reellen Zahlen

Satz 4.1 (ohne Beweis)

Es gibt (bis auf Isomorphie) einen eindeutigen angeordneten Körper $(K, +, \cdot, \leq)$ mit folgenden Eigenschaften:

1°) $\mathbb{Q} \subseteq K$ ist ein Unterkörper von K.

2°) Das Archimedische Axiom (A.A) gilt in K, d.h. $\forall x, y \in K$ mit $x, y > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nx > y$ $[nx := \underbrace{x + x + \dots + x}_{n\text{-mal}}]$



3°) $(K,+,\cdot,\leq)$ ist vollständig, d.h jede nichtleere beschränkte Teilmenge M aus K besitzt ein Supremum. (7) □

Dieser Körper wird mit $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$ bezeichnet.

Bem: i) Die Eigenschaft 3°) im Satz 4.1 ist der wesentliche Unterschied zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$.

ii) Man kann zeigen, dass die Eigenschaft 2°) (also A.A) im Satz 4.1 Konsequenz aus 3°) ist. Also könnte man im Satz 4.1 auf 2°) verzichten.

Dezimalentwicklung: Mithilfe des Satzes 4.1 kann man zeigen: Jede reelle Zahl x besitzt eine Dezimalentwicklung

$$x = \pm a_{-k}a_{-(k-1)}\cdots a_{-1}a_0,a_1a_2a_3\ldots,$$ wobei $k\in\mathbb{N}$, $a_{-k}\neq 0$ falls $k\neq 0$, $a_i\in\{0,1,2,\ldots,9\}$ $\forall i\geq -k$.

Die Dezimalentwicklung ist eindeutig bestimmt, es sei denn $\exists i\geq -k$ mit ($a_j=9$ $\forall j\geq i$ oder $a_j=0$ $\forall j\geq i$). In diesem Fall gibt es zwei Möglichkeiten. z.B: $x=3{,}25=3{,}250000\ldots=3{,}249999\ldots$

Def: Die Dezimalentwicklung $x=\pm a_{-k}\ldots a_0,a_1a_2a_3\ldots$

i) heißt periodisch wenn es $l,m\in\mathbb{N}^*$ gibt mit $a_{i+l}=a_i$ $\forall i\geq m$

ii) bricht ab wenn es ein $l\in\mathbb{N}^*$ gibt mit $a_i=0$ $\forall i\geq l$.

Bspie: $\frac{22}{7}=3{,}142857142857\ldots=3{,}\overline{142857}$; $\frac{1}{8}=0{,}125=0{,}125\overline{0}$.

Def: Sei $x \in \mathbb{R}$, $x = \pm a_{-k} \dots a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$

Die Periodenlänge von x wird definiert durch

$$P(x) := \begin{cases} \text{das kleinste } l \in \mathbb{N}^* \text{ sodass } \exists m \in \mathbb{N} \text{ mit } a_{i+l} = a_i \ \forall i \geq m, \text{ wenn} \\ \text{ein solches } l \in \mathbb{N}^* \text{ existiert.} \\ \infty \text{ sonst.} \end{cases}$$

Daraus folgt: (Die Dezimalentwicklung von x ist periodisch) $\Leftrightarrow P(x) < \infty$.

Bsple: Seien $x_1 = 2{,}4\overline{357357}$, $x_2 = \frac{1}{8} = 0{,}125$, $x_3 = \frac{1}{7} = 0{,}\overline{142857}$.

$P(x_1) = 3$ denn $x_1 = 2{,}4\overline{357}$, $P(x_2) = 1$ denn $x_2 = 0{,}125\overline{0}$, $P(x_3) = 6$.

Satz 4.2 Sei $x \in \mathbb{R}$.

a) Wenn die Dezimalentwicklung von x periodisch ist, dann ist $x \in \mathbb{Q}$.

b) Wenn $x \in \mathbb{Q}$, dann ist die Dezimalentwicklung von x periodisch.

Sei $x = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$, $ggT(m,n) = 1$.

Schreiben wir $n = 2^i 5^j \tilde{n}$ mit $i, j \in \mathbb{N}$ und $2 \nmid \tilde{n}$, $5 \nmid \tilde{n}$.

Dann ist die Periodenlänge $P(x)$ gegeben durch die Ordnung von 10 in $(\mathbb{Z}_{\tilde{n}})^*$. [$\mathbb{Z}_{\tilde{n}}^* :=$ mult. Gruppe der Einheiten des Rings $\mathbb{Z}_{\tilde{n}}$]

c) Sei $x \in \mathbb{Q}$, $x = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$, $ggT(m,n) = 1$. Dann:

Die Dezimalentwicklung von x bricht ab $\Leftrightarrow \exists i, j \in \mathbb{N}$ mit $n = 2^i \cdot 5^j$.

d) Sei $x \in \mathbb{Q}$, $x = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$.

Dann kann die Dezimalentwicklung von x durch die übliche Division $m : n$ gefunden werden.

Beweis:

Zu a): i) Sei $x = 0,\overline{237} = 0,237237237\ldots$ $\quad 1000x = 237,237237\ldots$

$= 237,\overline{237} \Rightarrow 1000x - x = 237 \Rightarrow 999x = 237 \Rightarrow x = 237/999 \in \mathbb{Q}$.

ii) Allgemeiner: Sei $x = 0,\overline{a_1 a_2 \ldots a_k}$ mit $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \{0,1,2,\ldots,9\}$.

Dann (wie in i)) haben wir $(10^k - 1)x = (a_1 a_2 \ldots a_k)_{10} = a_1 \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_{k-1} \cdot 10 + a_k$

$$\Rightarrow x = \frac{a_1 \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_{k-1} \cdot 10 + a_k}{10^k - 1} \in \mathbb{Q}.$$

iii) Sei $x = 28,45\overline{2741}$. $\quad x = 28,45 + 0,00\overline{2741} = 28,45 + \frac{1}{100}\underbrace{0,\overline{2741}}_{\in \mathbb{Q} \text{ nach ii)}} \in \mathbb{Q}$.

Zu b): Sei $x \in \mathbb{Q}$, $x = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $ggT(m,n) = 1$.

OBdA, $0 \leq x < 1$. [Seien $q \in \mathbb{Z}$ und $r \in \mathbb{N}$ mit $m = qn + r$ und $0 \leq r < n$.

$ggT(m,n) = 1 \Rightarrow ggT(r,n) = 1$. $x = \frac{m}{n} = q + \frac{r}{n}$ und $0 \leq \frac{r}{n} < 1$.

x und r/n unterscheiden sich nur um eine ganze Zahl. Daraus folgt:

(Die Dezimalentwicklung von x ist periodisch $\Leftrightarrow$ die " " $\frac{r}{n}$ " ") und $P(x) = P(\frac{r}{n})$.]

Also nehmen wir an, dass $x = \frac{m}{n}$ mit $0 \leq m < n$ und $ggT(m,n) = 1$.

Fall 1: $2 \nmid n$, $5 \nmid n$ [$\Rightarrow i = j = 0 \wedge n = \tilde{n}$ in der Aussage 4.2b)]

Wir zeigen zunächst, dass die Dezimalentwicklung von x periodisch ist.

Nach dem obigen Beweis von a) ii) reicht es z.z, dass

$$\exists \ell \in \mathbb{N}^* \; \exists k \in \mathbb{N}^* \text{ mit } x = \ell/(10^k - 1).$$

$$\left(\exists \ell \in \mathbb{N} \; \exists k \in \mathbb{N}^* \text{ mit } x = \frac{m}{n} = \frac{\ell}{10^k - 1}\right) \Leftrightarrow \exists \ell \in \mathbb{N} \; \exists k \in \mathbb{N}^* \text{ mit } m(10^k - 1) = n\ell \overset{ggT(m,n)=1}{\Leftrightarrow}$$

$(\exists k \in \mathbb{N}^* \text{ mit } n \mid (10^k - 1)) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}^* \text{ mit } 10^k - 1 \equiv 0 \bmod n) \Leftrightarrow$
$\exists k \in \mathbb{N}^* \text{ mit } 10^k \equiv 1 \bmod n$.

Da $ggT(10, n) = 1$ laut Voraussetzung ist $10 \in (\mathbb{Z}_n)^*$. Also gibt es ein $k \in \mathbb{N}^*$ mit $10^k \equiv 1 \bmod n$.

Für ein solches k haben wir $x = \frac{l}{10^k - 1}$ für ein $l \in \mathbb{N}$, $(0 \leq l < 10^k - 1)$ und der Beweis von a)ii) zeigt, dass $x = 0,\overline{a_1 a_2 \ldots a_k}$ für gewisse $a_1, \ldots, a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Damit ist gezeigt, dass die Dezimalentwicklung von x periodisch ist. Die Periodenlänge $P(x)$ ist die kleinste Zahl $k \in \mathbb{N}^*$ mit $10^k \equiv 1 \bmod n$, diese Zahl ist (laut Def.) die Ordnung von 10 in $(\mathbb{Z}_n)^* = (\mathbb{Z}_{\tilde{n}})^*$.

<u>Fall 2</u>: $n = 2^i \cdot 5^j \tilde{n}$ mit $i, j \in \mathbb{N}$, $i + j \geq 1$, $2 \nmid \tilde{n}$, $5 \nmid \tilde{n}$.

$$x = \frac{m}{n} = \frac{m}{2^i \cdot 5^j \tilde{n}} = \frac{2^j 5^i m}{2^j 5^i 2^i 5^j \tilde{n}} = \frac{1}{10^{i+j}} \frac{2^j 5^i m}{\tilde{n}}.$$

$ggT(m, n) = 1 \overset{\tilde{n} \mid n}{\Rightarrow} ggT(m, \tilde{n}) = 1$

$\underset{2 \nmid \tilde{n},\, 5 \nmid \tilde{n}}{\Rightarrow} ggT(2^j 5^i m, \tilde{n}) = 1$. Fall 1 $\Rightarrow P\left(\frac{2^j \cdot 5^i m}{\tilde{n}}\right)$ ist die Ordnung von 10 in $(\mathbb{Z}_{\tilde{n}})^*$.

$$x = \frac{1}{10^{i+j}} \cdot \frac{2^j 5^i m}{\tilde{n}} \Rightarrow P(x) = P\left(\frac{2^j 5^i m}{\tilde{n}}\right) = \text{Ordnung von 10 in } (\mathbb{Z}_{\tilde{n}})^*.$$

<u>Zu c)</u>: "$\Rightarrow$" Sei $x = 28,4566$. $x = \frac{284566}{10^4} = \frac{284566}{2^4 \cdot 5^4} = \frac{142283}{2^3 \cdot 5^4}$.

"$\Leftarrow$" Sei $x = \frac{m}{2^i 5^j}$ mit $ggT(m, 2^i \cdot 5^j) = 1$.

$x = \frac{m}{2^i \cdot 5^j} = \frac{5^i 2^j m}{5^i 2^j 2^i 5^j} = \frac{2^j 5^i m}{10^{i+j}} = \frac{q}{10^{i+j}}$ für ein $q \in \mathbb{Z}$. Also bricht die Dezimalentwicklung von x ab. [Bsp: $2852/10^6 = 0,002852$]

zu d): Bspl: $x = 7071/70$

$7071 : 70 = 101{,}0\overline{142857}$

```
7071 : 70
70
 07
  0
  71
  70
   10
    0
   100
    70
     300
     280
       200
       140
         600
         560
          400
          350
           500
           490
           100
```

$\square$

Beispiele:

a) Sei $x = 4{,}2\overline{35}$. Wir möchten x als gekürzten Bruch darstellen.

$x = 4{,}2\overline{35} = 4{,}2 + 0{,}0\overline{35} = 4{,}2 + \frac{1}{10} \cdot 0{,}\overline{35} = 4{,}2 + \frac{1}{10} \cdot \frac{35}{99} = \frac{42 \cdot 99 + 35}{10 \cdot 99}$

$= 4193/990.$

b) Sei $x = 5/333$. Wir wollen die Dezimalentwicklung von x.

$X = 5/333 \overset{\text{Glück}}{=} 15/999 = 0{,}\overline{015}.$

c) Sei $x = \sqrt{2}$. $P(x) = ?$ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow P(\sqrt{2}) = \infty$.

d) Sei $x = 1/97$. $P(x) = ?$ 97 ist Primzahl $\Rightarrow 97 = 2^0 \cdot 5^0 \cdot 97$, $2 \nmid 97, 5 \nmid 97$.

$P(1/97)$ ist die Ordnung von 10 in $\mathbb{Z}_{97}^*$.

97 prim $\Rightarrow |\mathbb{Z}_{97}^*| = 96 = 3 \cdot 32 = 3 \cdot 2^5$.

Bekannt: $P(1/97) \in \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 3, 6, 12, 24, 48, 96\}$.

Wir rechnen in $\mathbb{Z}_{97}$:

$10^1 = 10$; $10^2 = 100 = 3$; $10^4 = 3 \cdot 3 = 9$; $10^8 = 81 = -16$; $10^{16} = 256 = 256 - 291$
$= -35$, $10^{32} = 35^2 = 1225 = 1225 - 970 = 255 = -36$.

$10^3 = 10 \cdot 10^2 = 10 \cdot 3 = 30$; $10^6 = 900 = 27$; $10^{12} = 729 = 50$; $10^{24} = 2500 = -22$;
$10^{48} = 484 = -1$; $\boxed{10^{96} = 1}$ Also $P(1/97) = 96$.

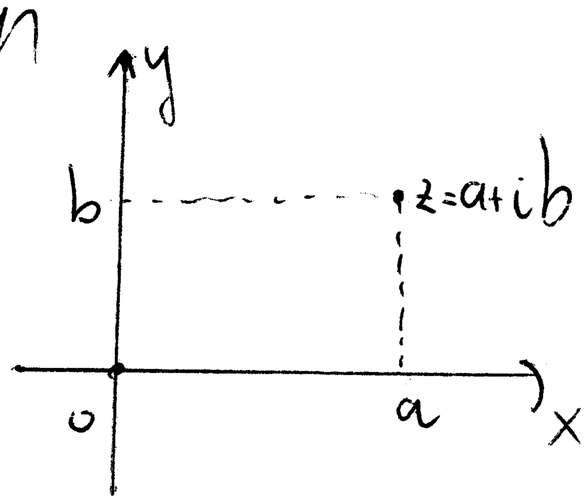
E) Die Komplexen Zahlen

Def: Eine Komplexe Zahl ist ein Ausdruck der Form
$z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

Seien $x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$.

Def: 1) Gleichheit: $x + iy = \tilde{x} + i\tilde{y} :\Leftrightarrow (x = \tilde{x} \wedge y = \tilde{y})$.

2) $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ ist die Menge der Komplexen Zahlen. Darstellung einer Komplexen Zahl $z = a + ib$ in der Gaußschen Zahlenebene:



3) Addition: $(x+iy)+(\tilde{x}+i\tilde{y}) := x+\tilde{x}+i(y+\tilde{y})$.

4) Multiplikation: $(x+iy)(\tilde{x}+i\tilde{y}) := x\tilde{x}-y\tilde{y}+i(x\tilde{y}+y\tilde{x})$.

Satz 4.3: $(\mathbb{C},+,\cdot)$ ist ein Körper. $\square$

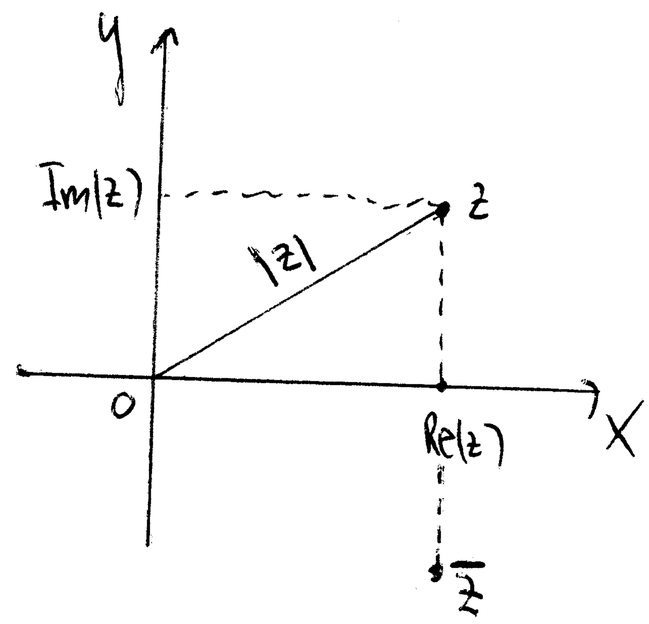
Bem: $\mathbb{R}$ ist ein Unterkörper von $\mathbb{C}$ $\left[\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{C}\\ x\mapsto x+i\cdot 0\end{array}\right.$ ist ein Körperhomomorphismus$\left.\right]$

Def: Sei $z=x+iy\in\mathbb{C}$.

i) Der Betrag von z wird definiert durch $|z|:=\sqrt{x^2+y^2}$.

ii) Die zu z konjugierte Zahl wird definiert durch $\bar{z}:=x-iy$ [Spiegelung an der x-Achse]

iii) $x=\mathrm{Re}(z)$ heißt der Realteil von z
$y=\mathrm{Im}(z)$ " " Imaginärteil von z.



Lemma 4.4: Seien $z,w\in\mathbb{C}$. Dann:

a) $|z|\geq 0$ b) $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$ c) $|z|^2=z\bar{z}$ d) $|zw|=|z|\cdot|w|$

e) $|z+w|\overset{\Delta}{\leq}|z|+|w|$ f) $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$ g) $\overline{zw}=\bar{z}\bar{w}$ h) $\bar{\bar{z}}=z$

i) $z=\bar{z}\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$.

Bem: $\begin{array}{l}\mathbb{C}\to\mathbb{C}\\ z\mapsto\bar{z}\end{array}$ ist ein Körperautomorphismus.

Anwendung: Ang, $x\in\mathbb{N}$ sei eine Summe von 2 Quadraten ganzer Zahlen $[x=a^2+b^2$ mit $a,b\in\mathbb{Z}]$. Dann ist auch jede Potenz x^n $(n\in\mathbb{N})$ eine Summe von 2 Quadraten ganzer Zahlen.

Begründung: $x^n = (a^2+b^2)^n = ((a+ib)(a-ib))^n = \underbrace{(a+ib)}_{z}{}^n \underbrace{(a-ib)}_{\bar z}{}^n =$

$z^n \bar z^n \underset{4.4g)}{=} z^n \overline{z^n} = w\bar w$ mit $w := z^n$.

$w = (a+ib)^n \underset{\text{Bin. Lehrs.}}{=} c+id$ mit $c,d \in \mathbb{Z}$. Also $x^n = w\bar w = |w|^2 = c^2+d^2$. $\square$

Algebraische und transzendente Zahlen

Def: Sei $\alpha \in \mathbb{C}$.

- α heißt algebraisch falls $\exists P(x) \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\}$ mit $P(\alpha) = 0$.
- Ist α nicht algebraisch, so heißt α transzendent.
- $\mathbb{A}$ bezeichnet die Menge der algebraischen Zahlen.

Beispiele:

i) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{A}$. Sei $\alpha = m/n$ mit $m,n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. α ist Nullstelle von $P(x) := nx - m \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\}$.

ii) $\sqrt{2} \in \mathbb{A}$ denn $\sqrt{2}$ ist Lösung von $x^2 - 2 = 0$.

iii) $i \in \mathbb{A}$ denn i ist Lösung von $x^2+1 = 0$.

iv) $\sqrt[3]{7} \in \mathbb{A}$ denn $\sqrt[3]{7}$ ist Lösung von $x^3 - 7 = 0$.

v) $\sqrt{2} + \sqrt[3]{5} + \sqrt[4]{7} \in \mathbb{A}$?

Satz 4.5: $\mathbb{A}$ ist ein Unterkörper von $\mathbb{C}$ [d.h. $0,1 \in \mathbb{A}$ und $z,w \in \mathbb{A} \Rightarrow z+w, -z, zw, \frac{1}{z} \in \mathbb{A}$]. $\square$

Also $\sqrt{2} + \sqrt[3]{5} + \sqrt[4]{7} \in \mathbb{A}$.

Bem: $\mathbb{A}$ ist abzählbar, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{A}$ ist überabzählbar [fast alle komplexen Zahlen sind transzendent].

Satz 4.6 (Hermite-Lindemann, 1882)

Ist $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ algebraisch, so ist e^α transzendent. $\square$

Konsequenzen: i) $e = e^1$ ist transzendent.

ii) π ist transzendent denn $e^{i\pi} \overset{\text{Ana I}}{=} -1$. $[\pi \in \mathbb{A} \overset{4.5}{\Rightarrow} i\pi \in \mathbb{A} \overset{4.6}{\Rightarrow}$ $e^{i\pi}$ ist transzendent $\Rightarrow -1 = e^{i\pi}$ ist transzendent, $\lightning$ $]$.

F) Die Quaternionen (Hamilton, 1843)

Seien $1, i, j, k$ 4 verschiedene Symbole.

Def: Ein Quaternion ist ein Ausdruck der Form

$$q = q_0 1 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \text{ mit } q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}.$$

Seien $q_0, q_1, q_2, q_3, \tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3 \in \mathbb{R}$.

Def: 1) Gleichheit: $q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k = \tilde{q}_0 + \tilde{q}_1 i + \tilde{q}_2 j + \tilde{q}_3 k :\Leftrightarrow$

$$(q_0 = \tilde{q}_0 \wedge q_1 = \tilde{q}_1 \wedge q_2 = \tilde{q}_2 \wedge q_3 = \tilde{q}_3).$$

2) $\mathbb{H} := \{ q = q_0 1 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \mid q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R} \}$ ist die Menge aller Quaternionen.

Seien $x = x_0 1 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ und $y = y_0 1 + y_1 i + y_2 j + y_3 k \in \mathbb{H}$; $\lambda \in \mathbb{R}$.

Mit den 2 Verknüpfungen

$$\mathbb{H} \times \mathbb{H} \xrightarrow{+} \mathbb{H} \qquad\qquad \mathbb{R} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$$

$$(x, y) \mapsto x + y := (x_0 + y_0) \cdot 1 + (x_1 + y_1) \cdot i + (x_2 + y_2) \cdot j + (x_3 + y_3) \cdot k \qquad (\lambda, x) \mapsto \lambda x := (\lambda x_0) \cdot 1 + (\lambda x_1) \cdot i + (\lambda x_2) \cdot j + (\lambda x_3) \cdot k$$

ist $\mathbb{H}$ ein 4-dim. reeller Vektorraum mit Basis $1, i, j, k$.

Bem: Es gelten die Inklusionen $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{H}$.

$x \mapsto x + i0$

$x + yi \mapsto x \cdot 1 + yi + 0 \cdot j + 0 \cdot k$.

Wir möchten eine Multiplikation $\mathbb{H} \times \mathbb{H} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{H}$ definieren, sodass

a) Wenn $x, y \in \mathbb{C}$, dann $x \cdot y = \underbrace{xy}_{\text{Mult. in } \mathbb{C}}$

b) Wenn $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{H}$ dann $\lambda \cdot x = x \cdot \lambda = \lambda x$.
skalare Multipl.

Def: Wir setzen

i) $e \cdot 1 = 1 \cdot e = e \quad \forall e \in \{1, i, j, k\}$; $i^2 = j^2 = k^2 = -1$;

$ij = k$, $ji = -k$, $jk = i$, $kj = -i$, $ki = j$, $ik = -j$.

ii) $(x_0 \cdot 1 + x_1 \cdot i + x_2 \cdot j + x_3 \cdot k) \cdot (y_0 \cdot 1 + y_1 \cdot i + y_2 \cdot j + y_3 \cdot k) :=$ Distributivgesetze in $\mathbb{H}$ müssen gelten und $\lambda \cdot x = x \cdot \lambda = \lambda x$ auch

$$(x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3) \cdot 1 + (x_0 y_1 + x_1 y_0 + x_2 y_3 - x_3 y_2) \cdot i + (x_0 y_2 + x_2 y_0 + x_3 y_1 - x_1 y_3) \cdot j + (x_0 y_3 + x_3 y_0 + x_1 y_2 - x_2 y_1) \cdot k.$$

Def: Sei $q := q_0 \cdot 1 + q_1 \cdot i + q_2 \cdot j + q_3 \cdot k$.

i) Das Konjugierte von q ist definiert als $\bar{q} := q_0 \cdot 1 - q_1 \cdot i - q_2 \cdot j - q_3 \cdot k$.

ii) Der Betrag (Norm) von q ist definiert durch $|q| := \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$

Lemma 4.7: Seien $x, y, q \in \mathbb{H}$. Dann:

i) $\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$; $\overline{xy} = \bar{y} \cdot \bar{x}$; $\bar{\bar{x}} = x$.

ii) $|xy| = |x| \cdot |y|$

iii) $|q|^2 = q \cdot \bar{q} = \bar{q} \cdot q$ und für $q \neq 0$ ist $q^{-1} := \frac{\bar{q}}{|q|^2}$ das zu q inverse Quaternion, bezügl. $\cdot$

Beweis: zu iii)

- $q\bar{q} = (q_0 1 + q_1 i + q_2 j + q_3 k)(q_0 + (-q_1) i + (-q_2) j + (-q_3) k) \overset{\text{ausmultiplizieren}}{=} q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = |q|^2$

  und (analog) $\bar{q} q = |q|^2$.

- Sei $q \neq 0$. $q\left(\frac{\bar{q}}{|q|^2}\right) = \frac{1}{|q|^2} q\bar{q} = \frac{1}{|q|^2}|q|^2 = 1$ und (analog) $\left(\frac{\bar{q}}{|q|^2}\right) q = 1$.

Daher folgt $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$. [Beachte $\lambda \cdot x = x \cdot \lambda \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{H}$].

Satz 4.8: $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ ist ein Schiefkörper [d.h alle Eigenschaften vom Körper gelten ausser der Kommutativität des Produkts]

"Beweis" Das neutrale Elem. für $+$ ist $0 := 0 \cdot 1 + 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k$.

" " " " $\cdot$ ist $1 := 1 \cdot 1 + 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k$.

Das Inverse für $x = x_0 1 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ bezügl. $+$ ist

$$-x := (-x_0) \cdot 1 + (-x_1) \cdot i + (-x_2) \cdot j + (-x_3) \cdot k.$$

Das Inverse für $x \neq 0$ bezügl. $\cdot$ ist $x^{-1} := \frac{1}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\left(x_0 1 + (-x_1) \cdot i + (-x_2) \cdot j + (-x_3) \cdot k\right)$.

Nur die Assoziativität des Produkts ist ein bisschen mühsam zu überprüfen. [Es reicht z.z $(xy)z = x(yz) \ \forall x, y, z \in \{1, i, j, k\}$]. $\square$

Schreibweise: Statt $q_0 1 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ kann man einfach $q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ schreiben. Statt $0 + 2i + 3j + 0k$ schreibt man einfach $2i + 3j$. Etc...

Bsple: i) $(2 + 3i) + (1 - i + 4j) = 3 + 2i + 4j$.

ii) $(2 + 3i)(j + k) = 2j + 2k + 3ij + 3ik = 2j + 2k + 3k - 3j = -j + 5k$.

iii) $(1 + i - 2j + 3k)^{-1} = ?$ $(1 + i - 2j + 3k)^{-1} = \frac{1 - i + 2j - 3k}{1^2 + 1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \frac{1}{15} - \frac{1}{15} i + \frac{2}{15} j - \frac{3}{15} k$.

Satz 4.9 (Lagrange, 1770)

Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ kann als Summe von 4 ganzzahligen Quadratzahlen geschrieben werden.

Beweis: Da jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Produkt von Primzahlen ist reicht es zu zeigen:

i) Jede Primzahl p kann als Summe von 4 Quadratzahlen geschrieben werden.

ii) Wenn n_1 und $n_2 \in \mathbb{N}$ als Summe von 4 Quadratzahlen geschrieben werden können, so auch $n_1 n_2$.

Zu ii): Ang. $n_1 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ und $n_2 = y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ mit $x_i, y_i \in \mathbb{N}$ für $i = 0,1,2,3$.

Seien $x := x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ und $y := y_0 + y_1 i + y_2 j + y_3 k$. $[x, y \in \mathbb{H}]$

$$n_1 n_2 = (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = |x|^2 \cdot |y|^2 \overset{4.7iii)}{=} x\bar{x}\underbrace{y\bar{y}}_{\in \mathbb{R}} = x(y\bar{y})\bar{x}$$

$$= (xy)(\bar{y}\bar{x}) \overset{4.7i)}{=} (xy)\overline{xy} = z\bar{z} \overset{4.7iii)}{=} |z|^2 \text{ mit } z := xy.$$

$$z = xy = (x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k)(y_0 + y_1 i + y_2 j + y_3 k) \underset{\substack{\text{ausmultiplizieren} \\ x_i, y_i \in \mathbb{N} \text{ für } i=0,1,2,3}}{=} z_0 + z_1 i + z_2 j + z_3 k \text{ mit}$$

$z_i \in \mathbb{Z} \ \forall i \leq 3$.

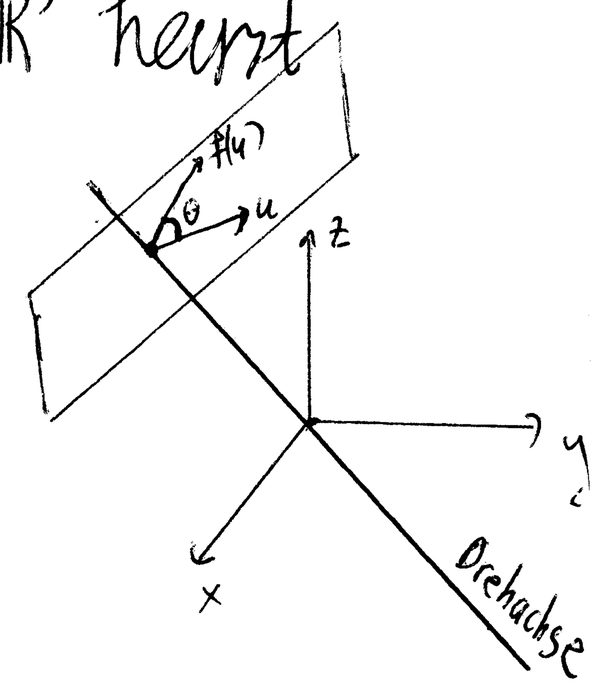
Also $n_1 n_2 = |z|^2 = z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ mit $z_0, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{Z}$.

$n_1 n_2$ ist ein Produkt von 4 ganzzahligen Quadratzahlen.

Zu i): Schwieriger. $\square$

Einheitsquaternionen und Drehungen im $\mathbb{R}^3$

Zur Erinnerung: Eine lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heißt Drehung falls $\|f(u)\| = \|u\|$ $\forall u \in \mathbb{R}^3$ und $\det(f) = 1$.



Bezüglich der kanonischen Basis e_1, e_2, e_3 von $\mathbb{R}^3$ wird f durch eine Matrix $A \in SO(3)$ dargestellt, wo $SO(3) := \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid AA^t = I \wedge \det(A) = 1\}$.

Def: $S := \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\}$ ist die Menge der Einheitsquaternionen. S ist eine Untergruppe von der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{H}^*, \cdot)$, s. Üb.

Wir identifizieren $\mathbb{R}^3$ mit $\mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k = \{x \in \mathbb{H} \mid \bar{x} = -x\}$ und betrachten

$$\rho: S \longrightarrow SO(3).$$
$$q \longmapsto \rho(q): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$
$$x \mapsto qx\bar{q}$$

ρ ist wohldefiniert denn

i) $qx\bar{q} \in \mathbb{R}^3$ $\forall x \in \mathbb{R}^3$ $\forall q \in S$.

ii) $\rho(q)$ ist linear und erhält die Norm $\forall q \in S$.

iii) $\det \rho(q) = 1$ $\forall q \in S$ $(\Rightarrow \rho(q) \in SO(3))$.

Dann kann man zeigen: $\rho: S \to SO(3)$ ist ein surj. Gruppenhomomorphismus und $\mathrm{Ker}(\rho) = \{\pm 1\}$. D.h. $S/\{\pm 1\} \simeq SO(3)$.

Körperstruktur auf dem $\mathbb{R}^n$

Wir betrachten $(\mathbb{R}^n, +)$, wobei $+$ die gewöhnliche Addition ist:
Für $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$ ist $x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$.

Für welche $n \in \mathbb{N}^*$ gibt es eine Multiplikation $\cdot$ auf dem $\mathbb{R}^n$, so dass $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ein Körper wird?

Satz 4.10

Das geht nur für $n = 1$ und $n = 2$, und das geht fast für $n = 4$.
$[n = 1 \rightsquigarrow \mathbb{R};\ n = 2 \rightsquigarrow \mathbb{C};\ n = 4 \rightsquigarrow \mathbb{H}]$

$\square$